

Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Παράρτημα 1

Πρωτοβάθμιες Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών

1412 Μακροοικονομική Θεωρία
II

Καθ. Γιώργος Αλογοσκούφης

Μια Συγκλίνουσα Πρωτοβάθμια Εξίσωση Διαφορών

Μία πρωτοβάθμια εξίσωση διαφορών λαμβάνει τη μορφή,

$$x_t = a + \lambda x_{t-1}$$

a και λ είναι σταθερές παράμετροι και x είναι μία μεταβλητή απόθεμα η οποία είναι συνάρτηση του χρόνου.

Για να βρούμε τη λύση της εξίσωσης αυτής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των διαδοχικών αντικαταστάσεων στη δεξιά της πλευρά, δεδομένου ότι από την εξίσωση αυτή διαφορών προκύπτει ότι,

$$x_{t-1} = a + \lambda x_{t-2}, x_{t-2} = a + \lambda x_{t-3}, \dots, x_{t-n} = a + \lambda x_{t-n-1}$$

Κάνοντας αυτές τις διαδοχικές αντικαταστάσεις προκύπτει ότι,

$$x_t = a + \lambda x_{t-1} = a + \lambda(a + \lambda x_{t-2}) = a + \lambda(a + \lambda(a + \lambda x_{t-3})) = \dots$$

Κατά συνέπεια έχουμε ότι,

$$x_t = a(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-1}) + \lambda^n x_{t-n}$$

Μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για να συγκλίνει η έκφραση στη δεξιά πλευρά της τελευταίας αυτής εξίσωσης είναι η απόλυτη τιμή του λ να είναι μικρότερη από τη μονάδα. Στην περίπτωση αυτή το όριο της εξίσωσης καθώς το n τείνει προς το άπειρο είναι,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_t = a \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-1}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n x_{t-n} = \frac{a}{1 - \lambda}$$

Η έκφραση στα δεξιά είναι η τιμή ισορροπίας του x . Είναι η τιμή στην οποία θα συγκλίνει το x_t καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Η παράμετρος λ καλείται η ρίζα της εξίσωσης διαφορών και πρέπει να είναι μικρότερη από τη μονάδα για να έχουμε σύγκλιση προς την τιμή ισορροπίας.

Η Γενική Λύση μιας Πρωτοβάθμιας Εξίσωσης Διαφορών

Ας υποθέσουμε ότι η τιμή του x στη περίοδο 0 ισούται με x_0 . Τότε, από την εξίσωση διαφορών προκύπτει ότι στις επόμενες διαδοχικές περιόδους,

$$x_1 = a + \lambda x_0, x_2 = a(1 + \lambda) + \lambda^2 x_0, x_3 = a(1 + \lambda + \lambda^2) + \lambda^3 x_0, \dots$$

Μετά από t περιόδους θα ισχύει ότι,

$$x_t = a(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{t-1}) + \lambda^t x_0$$

Η ακολουθία στην παρένθεση, η οποία είναι το άθροισμα των t πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ , μπορεί να γραφεί ως,

$$(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{t-1}) = \frac{1 - \lambda^t}{1 - \lambda}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση διαφορών, προκύπτει ότι,

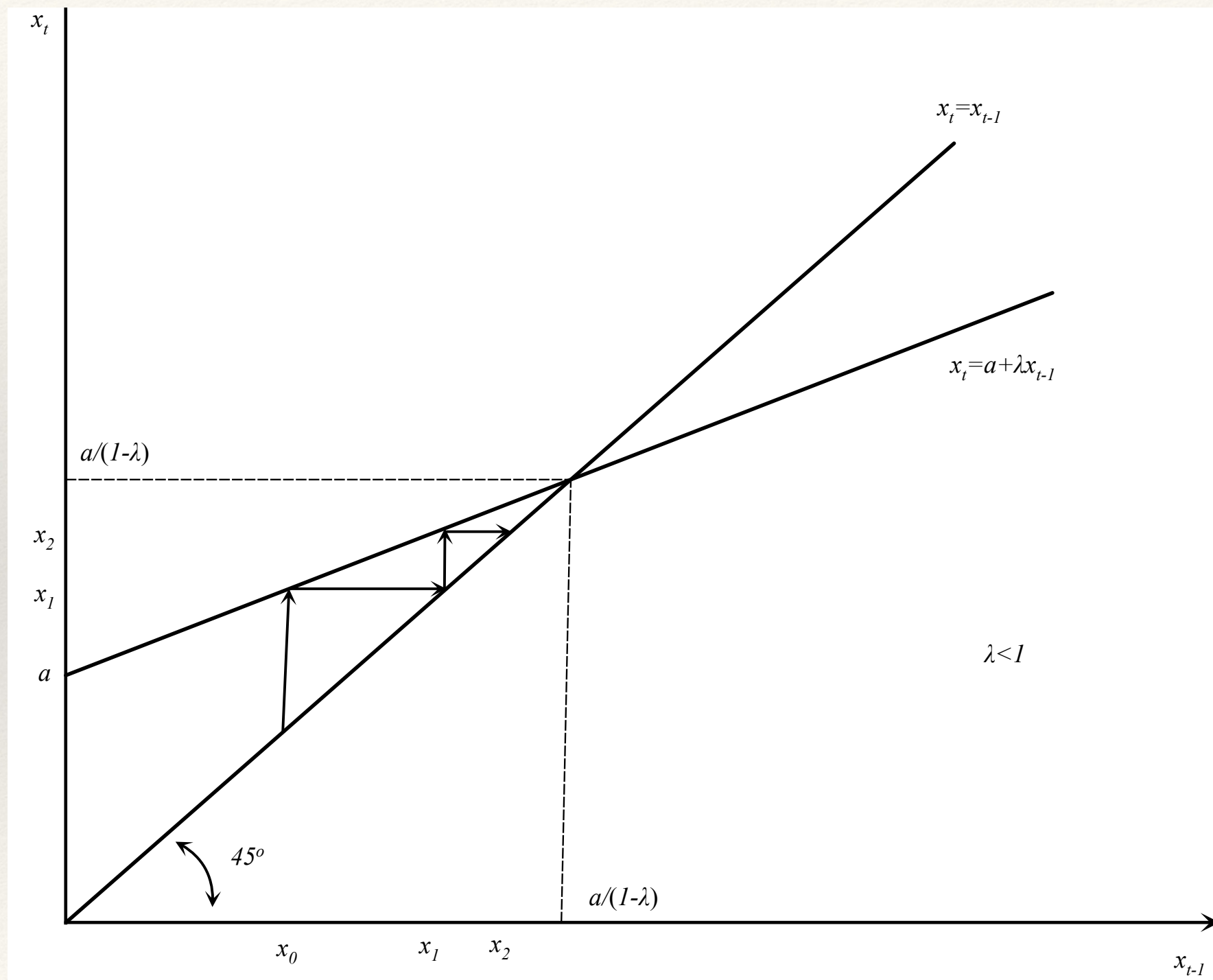
$$x_t = \frac{a(1 - \lambda^t)}{1 - \lambda} + \lambda^t x_0$$

Αυτή είναι η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών στην περίοδο t . Εξαρτάται από τις δύο παραμέτρους της εξίσωσης και a, λ , από τον χρόνο t και από την αρχική τιμή της μεταβλητής x στην περίοδο 0. Η γενική λύση μπορεί να γραφεί ως,

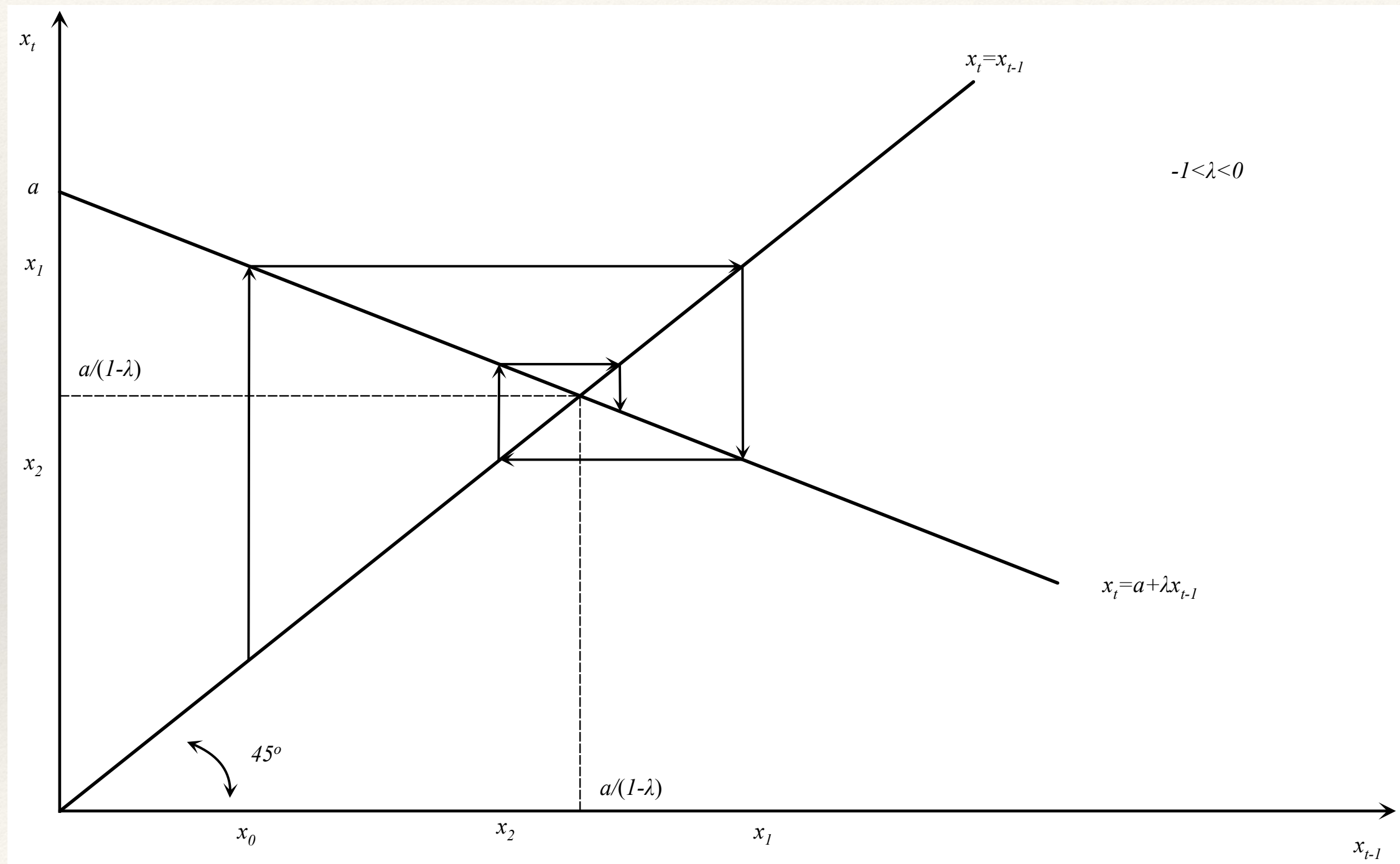
$$x_t = \frac{a}{1 - \lambda} + \lambda^t \left(x_0 - \frac{a}{1 - \lambda} \right)$$

Η ερμηνεία της μορφής αυτής της γενικής λύσης είναι ότι η διαφορά της τιμής της μεταβλητής x στην περίοδο t από την τιμή ισορροπίας της, είναι ένα ποσοστό της αρχικής διαφοράς της τιμής της στην περίοδο 0 από την τιμή ισορροπίας. Το ποσοστό αυτό εξαρτάται από το χρόνο και ισούται με τη ρίζα της εξίσωσης διαφορών υψωμένη στη δύναμη t .

Διαγραμματική Απεικόνιση Μιας Συγκλίνουσας Πρωτοβάθμιας Εξίσωσης Διαφορών, $0 < \lambda < 1$



Διαγραμματική Απεικόνιση Μιας Συγκλίνουσας Πρωτοβάθμιας Εξίσωσης Διαφορών, $-1 < \lambda < 0$



Μία Αποκλίνουσα Πρωτοβάθμια Γραμμική Εξίσωση Διαφορών

Ερχόμαστε τώρα στο να αναλύσουμε τη μέθοδο επίλυσης μιας αποκλίνουσας πρωτοβάθμιας γραμμικής εξίσωσης διαφορών, της ίδιας μορφής,

$$x_t = a + \lambda x_{t-1}$$

Στην περίπτωση που η απόλυτη τιμή της ρίζας λ είναι μεγαλύτερη από τη μονάδα, δεν υπάρχει σύγκλιση προς μια τιμή ισορροπίας. Και στις δύο περιπτώσεις η μεταβλητή είναι αποκλίνουσα, καθώς $|\lambda| > 1$.

Ένας τρόπος επίλυσης της αποκλίνουσας αυτής εξίσωσης διαφορών είναι να αντιστρέψουμε την εξίσωση και να την επιλύσουμε προς τα εμπρός. Επιλύοντας ως προς x_{t-1} , έχουμε ότι,

$$x_{t-1} = -\frac{a}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}x_t$$

Αν η παραπάνω εξίσωση ισχύει για την περίοδο $t-1$ τότε θα ισχύει και για την περίοδο t . Κατά συνέπεια, θα ισχύει ότι,

$$x_t = -\frac{a}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}x_{t+1}$$

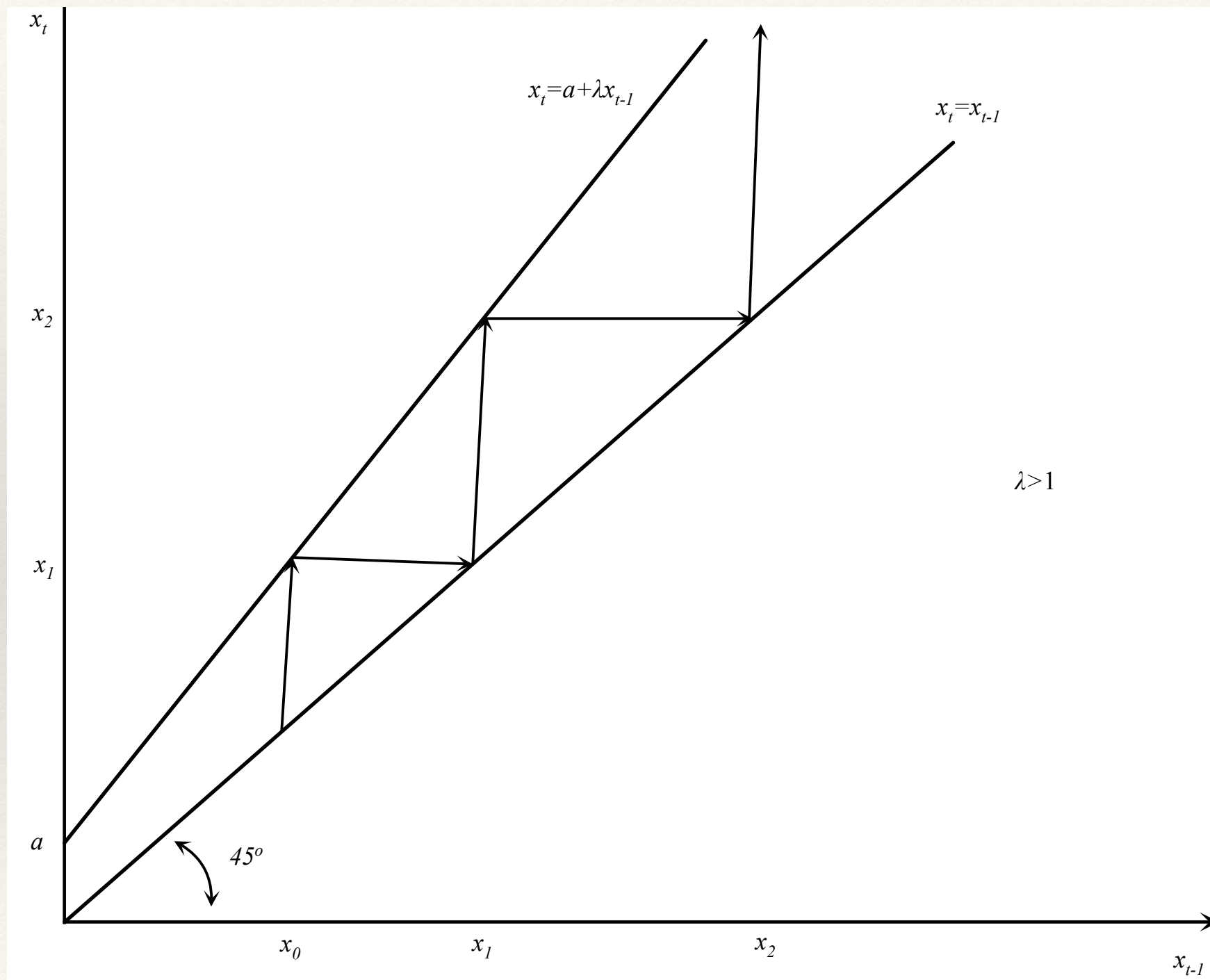
Για να βρούμε τη λύση της εξίσωσης αυτής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των διαδοχικών αντικαταστάσεων στη δεξιά της πλευρά, δεδομένου ότι από την εξίσωση αυτή διαφαίνεται ότι,

$$x_{t+1} = -\frac{a}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}x_{t+2}, x_{t+2} = -\frac{a}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}x_{t+3}, \dots, x_{t+n} = -\frac{a}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}x_{t+n+1}$$

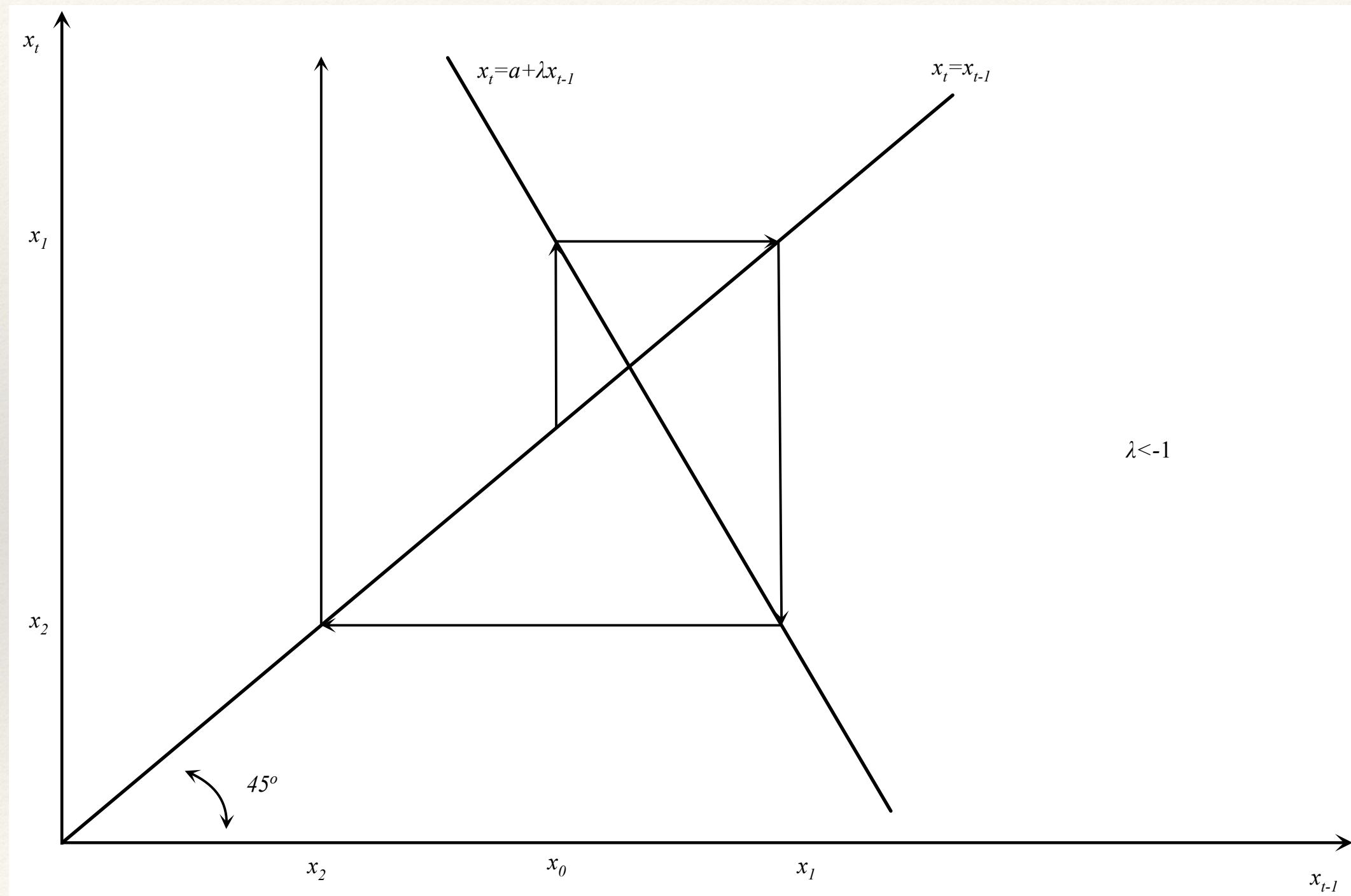
Κατά συνέπεια, μετά από n διαδοχικές αντικαταστάσεις θα έχουμε ότι,

$$x_t = -\frac{a}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{\lambda} + \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{n-1} \right) + \left(\frac{1}{\lambda} \right)^n x_{t+n}$$

Διαγραμματική Απεικόνιση Μιας Αποκλίνουσας Πρωτοβάθμιας Εξίσωσης Διαφορών, $\lambda > 1$



Διαγραμματική Απεικόνιση Μιας Αποκλίνουσας Πρωτοβάθμιας Εξίσωσης Διαφορών, $\lambda < -1$



Επίλυση μιας Αποκλίνουσας Πρωτοβάθμιας Εξίσωσης Διαφορών

Μετά από n διαδοχικές αντικαταστάσεις στην αντεστραμμένη εξίσωση διαφορών, βρήκαμε ότι,

$$x_t = -\frac{a}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{\lambda} + \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{n-1} \right) + \left(\frac{1}{\lambda} \right)^n x_{t+n}$$

Μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για να συγκλίνει η έκφραση στη δεξιά πλευρά της τελευταίας αυτής εξίσωσης είναι η απόλυτη τιμή του λ να είναι μεγαλύτερη από τη μονάδα, όπως έχουμε υποθέσει. Στην περίπτωση, το όριο της εξίσωσης καθώς το n τείνει προς το άπειρο δίνεται από,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_t = -\frac{a}{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\lambda} + \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{n-1} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^n x_{t+n} = \frac{a}{1-\lambda}$$

Για πεπερασμένο x ισχύει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^n x_{t+n} = 0$. Κατά συνέπεια, από τις ιδιότητες των γεωμετρικών προόδων, η μόνη μη αποκλίνουσα λύση είναι,

$$x_t = -\frac{a}{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\lambda} + \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{n-1} \right) = \frac{a}{1-\lambda}$$

Για να μην ακολουθεί το x αποκλίνουσα πορεία, η μόνη λύση είναι να προσαρμοστεί αμέσως στην τιμή ισορροπίας και να παραμείνει σταθερό σε αυτή την τιμή εφεξής. Μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι η λύση αυτή ικανοποιεί την αρχική εξίσωση διαφορών.

Για να είναι εφικτή αυτή η λύση θα πρέπει το x να μην είναι μία μεταβλητή απόθεμα, αλλά μία μεταβλητή που μπορεί να προσαρμοστεί άμεσα και ελεύθερα προς το επίπεδο ισορροπίας της. Τέτοιες μεταβλητές στη μακροοικονομική είναι συνήθως μεταβλητές ροές, όπως η κατανάλωση και οι επενδύσεις ή και χρηματοοικονομικές μεταβλητές όπως οι τιμές των ομολόγων και τα επιτόκια.